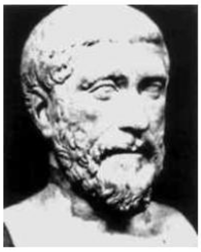
17.1 勾股定理

相传 2 500 多年前，毕达哥拉斯有一次在朋友家作客时，发现朋友家用砖铺成的地面图案反映了直角三角形三边的某种数量关系. 我们也来观察一下地面的图案（图 17.1-1），看看能从中发现什么数量关系.



毕达哥拉斯（Pythagoras，约前580—约前 500），古希腊著名的哲学家、数学家、天文学家.

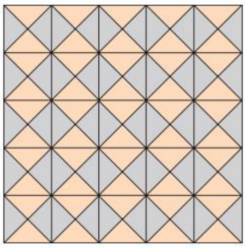


图 17.1-1

思考

图 17.1-2 中三个正方形的面积有什么关系？等腰直角三角形的三边之间有什么关系？

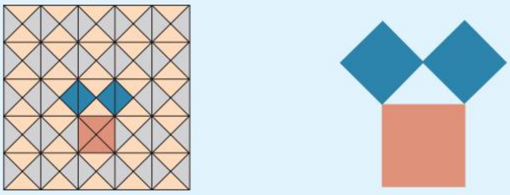


图 17.1-2

可以发现，以等腰直角三角形两直角边为边长的小正方形的面积的和，等于以斜边为边长的大正方形的面积. 即等腰直角三角形的三边之间有一种特殊的关系：斜边的平方等于两直角边的平方和.

看似平淡无奇的现象有时却蕴含着深刻的道理.

探究 5

等腰直角三角形有上述性质，其他的直角三角形也有这个性质吗？图 17.1-3 中，每个小方格的面积均为 1，请分别算出图中正方形 A，B，C，A′，B′，C′的面积，看看能得出什么结论.（提示：以斜边为边长的正方形的面积，等于某个正方形的面积减去 4 个直角三角形的面积.）

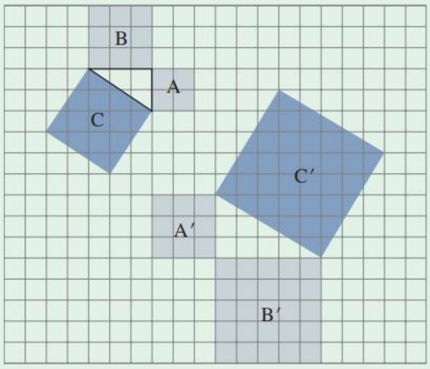


图 17.1-3

由上面的几个例子，我们猜想（图 17.1-4）：

命题 1　如果直角三角形的两条直角边长分别为 a，b，斜边长为 c，那么 $a^2+b^2=c^2$.

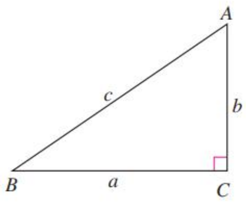


图 17.1-4

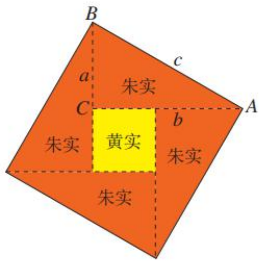


图 17.1-5

证明命题 1 的方法有很多，下面介绍我国古人赵爽的证法.

如图 17.1-5，这个图案是 3 世纪我国汉代的赵爽在注解《周髀算经》时给出的，人们称它为“赵爽弦图”. 赵爽根据此图指出：四个全等的直角三角形（红色）可以如图围成一个大正方形，中空的部分是一个小正方形（黄色）.

> 赵爽指出：按弦图，又可以勾股相乘为朱实二，倍之为朱实四. 以勾股之差自相乘为中黄实. 加差实，亦成弦实.

赵爽利用弦图证明命题 1 的基本思路如下：如图 17.1-6(1)，把边长为 a，b 的两个正方形

连在一起，它的面积是 a^2+b^2；另一方面，这个图形可分割成四个全等的直角三角形（红色）和一个正方形（黄色）. 把图 17.1-6(1)中左、右两个三角形移到图 17.1-6(2)中所示的位置，就会形成一个以 c 为边长的正方形（图 17.1-6(3)）. 因为图 17.1-6(1)与图 17.1-6(3)都由四个全等的直角三角形（红色）和一个正方形（黄色）组成，所以它们的面积相等. 因此，$a^2+b^2=c^2$.

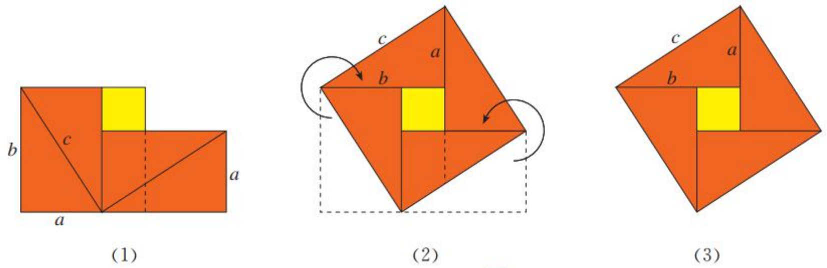


图 17.1-6

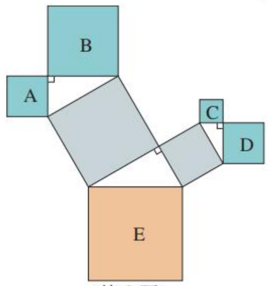
这样我们就证实了命题 1 的正确性，命题 1 与直角三角形的边有关，我国把它称为**勾股定理**(Pythagoras theorem).

“赵爽弦图”通过对图形的切割、拼接，巧妙地利用面积关系证明了勾股定理，它表现了我国古人对数学的钻研精神和聪明才智，是我国古代数学的骄傲. 因此，这个图案（图 17.1-5）被选为 2002 年在北京召开的国际数学家大会的会徽.

> 赵爽所用的这种方法是我国古代数学家常用的“出入相补法”. 在西方，人们称勾股定理为毕达哥拉斯定理.

练习

1. 设直角三角形的两条直角边长分别为 a 和 b，斜边长为 c.
   (1) 已知 $a=6$，$c=10$，求 b；
   (2) 已知 $a=5$，$b=12$，求 c；
   (3) 已知 $c=25$，$b=15$，求 a.
2. 如图，图中所有的三角形都是直角三角形，四边形都是正方形. 已知正方形 A，B，C，D 的边长分别是 12，16，9，12，求最大正方形 E 的面积.



(第 2 题)