6.4.3　余弦定理、正弦定理

一个三角形含有各种各样的几何量，例如三边边长、三个内角的度数、面积等，它们之间存在着确定的关系. 例如，在初中，我们得到过勾股定理、锐角三角函数，这是直角三角形中的边、角定量关系. 对于一般三角形，我们已经定性地研究过三角形的边、角关系，得到了 SSS，SAS，ASA，AAS 等判定三角形全等的方法. 这些判定方法表明，给定三角形的三个角、三条边这六个元素中的某些元素，这个三角形就是唯一确定的. 那么三角形的其他元素与给定的某些元素有怎样的数量关系？

下面我们利用向量方法研究这个问题.

1. 余弦定理

我们知道，两边和它们的夹角分别相等的两个三角形全等. 这说明，给定两边及其夹角的三角形是唯一确定的. 也就是说，三角形的其他边、角都可以用这两边及其夹角来表示. 那么，表示的公式是什么？

探究

在$\triangle ABC$中，三个角 A，B，C 所对的边分别是 a，b，c，怎样用 a，b 和 C 表示 c？

因为涉及的是三角形的两边长和它们的夹角，所以我们考虑用向量的数量积来探究.

如图 6.4-8，设$\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$，那么

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}. \qquad ①$$

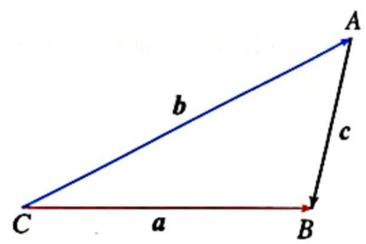

图 6.4-8

我们的研究目标是用$|\boldsymbol{a}|$，$|\boldsymbol{b}|$和 C 表示$|\boldsymbol{c}|$，联想到数量积的性质 $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{c}|^2$，可以考虑用向量 $\boldsymbol{c}$（即 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$）与其自身作数量积运算.

由①得

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{c}|^2&=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\\&=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\\&=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2-2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos C.\end{aligned}$$

所以

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

同理可得

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,$$
$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B.$$

> 从这里的推导过程，你感受到向量运算的力量了吗？

于是，我们得到了三角形中边角关系的一个重要定理：

余弦定理（law of cosines） 三角形中任何一边的平方，等于其他两边平方的和减去这两边与它们夹角的余弦的积的两倍．即

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,$$
$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B,$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

利用余弦定理，我们可以从三角形已知的两边及其夹角直接求出第三边．

> 你能用其他方法证明余弦定理吗？

思考

余弦定理指出了三角形的三条边与其中的一个角之间的关系．应用余弦定理，我们可以解决已知三角形的三边确定三角形的角的问题，怎么确定呢？

由余弦定理，可以得到如下推论：

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca},$$

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

> 余弦定理及其推论把用“SAS”和“SSS”判定三角形全等的方法从数量化的角度进行了刻画．

利用推论，可以由三角形的三边直接计算出三角形的三个角．

从余弦定理及其推论可以看出，三角函数把几何中关于三角形的定性结论变成了可定量计算的公式．

思考

勾股定理指出了直角三角形中三边之间的关系，余弦定理则指出了三角形的三条边与其中的一个角之间的关系．你能说说这两个定理之间的关系吗？

如果$\triangle ABC$中有一个角是直角，例如，$C=90°$，这时$\cos C=0$．由余弦定理可得$c^2=a^2+b^2$，这就是勾股定理．由此可见，余弦定理是勾股定理的推广，而勾股定理是余弦定理的特例．

一般地，三角形的三个角A，B，C和它们的对边a，b，c叫做三角形的元素．已知三角形的几个元素求其他元素的过程叫做**解三角形**（solving triangles）．

例 5 在$\triangle ABC$中，已知$b=60$ cm，$c=34$ cm，$A=41°$，解这个三角形（角度精确到$1°$，边长精确到 1 cm）．

解：由余弦定理，得

$$\begin{aligned}a^2&=b^2+c^2-2bc\cos A\\&=60^2+34^2-2\times60\times34\times\cos 41^\circ\\&\approx 1\,676.78,\end{aligned}$$

所以

$$a\approx 41(\text{cm}).$$

由余弦定理的推论，得

$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\frac{34^2+41^2-60^2}{2\times34\times41}=-\frac{763}{2\,788},$$

利用计算器，可得 $B\approx106^\circ$.

所以 $C=180^\circ-(A+B)\approx180^\circ-(41^\circ+106^\circ)=33^\circ$.

例 6 在$\triangle ABC$中，$a=7$，$b=8$，锐角 C 满足 $\sin C=\frac{3\sqrt{3}}{14}$，求 B（精确到 1°）.

分析：由条件可求 $\cos C$，再利用余弦定理及其推论可求出 B 的值.

解：因为 $\sin C=\frac{3\sqrt{3}}{14}$，且 C 为锐角，

所以 $\cos C=\sqrt{1-\sin^2 C}=\sqrt{1-\left(\frac{3\sqrt{3}}{14}\right)^2}=\frac{13}{14}$.

由余弦定理，得

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=49+64-2\times7\times8\times\frac{13}{14}=9,$$

所以 $c=3$.

进而 $\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\frac{9+49-64}{2\times3\times7}=-\frac{1}{7}$.

利用计算器，可得

$$B\approx98^\circ.$$

练习

1. (1) 在$\triangle ABC$中，已知 $b=12.9$ cm，$c=15.4$ cm，$A=42.3^\circ$，解这个三角形（角度精确到 0.1°，边长精确到 0.1 cm）；

   (2) 在$\triangle ABC$中，已知 $a=5$，$b=2$，$C=\frac{\pi}{3}$，求 c.

2. 在$\triangle ABC$中，已知 $a=2$，$b=\sqrt{2}$，$c=\sqrt{3}+1$，解这个三角形.

3. 在$\triangle ABC$中，已知 $b=5$，$c=2$，锐角 A 满足 $\sin A=\frac{\sqrt{231}}{20}$，求 C（精确到 1°）.